Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος και άλλα τινά...
από Ιωάννης Πλατάρος - Τρίτη, 27 Σεπτεμβρίου 2011, 11:11 ΜΜ

Οι αρχαίοι Έλληνες, έλεγαν ότι ένας «αριθμός» (εννοούσαν πάντα ακέραιο) «καταμετρεί» έναν άλλον, όταν χωρά ακέραιες φορές μέσα του. Δηλ. Το 1 καταμετρά το 10, αλλά και το 2 καταμετρά το 10 αλλά και το 5 καταμετρά το 10.

Μετά ετέθη το πρόβλημα, αν ένας αριθμός καταμετρά δύο άλλους δοθέντες. Ας πούμε, ότι έχουμε τους αριθμούς 256 κσι 120 . Και τους δύο τους καταμετρά η μονάδα. Δηλ. το 1 χωράει στο 256 256 φορές και το 1 χωράει στο 120 , 120 φορές.

Μέχρις εδώ τα πράγματα βαίνουν καλώς...

Μετά τίθεται το ερώτημα «ποιος είναι ο πιο μεγάλος αριθμός που καταμετρά το 256 και το 120» Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, αυτό το λέμε «Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 256 και 120» Εδώ η μέθοδος εύρεσης του ΜΚΔ των δύο αριθμών, έγκειται στην εξής περιγραφή με μη μαθηματική ορολογία: «Παίρνουμε τον μικρότερο, κοιτάμε πόσες φορές χωρά στον μεγαλύτερο και τι περισσεύει. Μετά , αυτό που περισσεύει, βλέπουμε πόσες φορές χωρά στο μικρότερο (τον 120) και τι περισσεύει αυτή την φορά. Το νέο περισσευούμενο, πόσες φορές χωρά στο προηγούμενο περισσευούμενο και γράφουμε το νέο που περισσεύει....»

Τα παραπάνω που τα περιγράφω λεκτικά, μοιάζουν με Κινέζικα έτσι όπως τα γράφω, γι αυτό, χρειάζεται η Μαθηματική γλώσσα , να περιγράψει τον Αλγόριθμο (τί είναι αλήθεια αλγόριθμος;) Πώς το κάνατε στο Δημοτικό ή στην Α΄ Γυμνασίου;

256 120

16 120

16 8

0 8

Πώς περιγράφεται η παραπάνω διαδικασία;

1) Γράφω τον μικρότερο κάτω από τον μικρότερο (το 120) κα ικάτω από τον μεγαλύτερο γράφω, ό,τι περισεύει αν κάνω την διαίρεση 256: 120 (Δηλ. το υπόλοιπο το 16)

2) Γράφω τον μικρότερο από τους δύο κάτω από τον μικρότερο (το 16) και δίπλα από το 16, γράφω, ό,τι περισσεύει (=το υπόλοιπο) αν κάνω την διαίρεση 256:16 ΚΑΙ ΟΥΤΩ ΚΑΘΕ ΕΞΗΣ, μέχρι να βρω 0 (να μην περισσεύει τίποτα) οπότε ΜΚΔ (256, 120)=8 Άρα : ο πιο μεγάλος αριθμός που μετρά ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΩΣ το 256 και το 120 είναι το 8 .

Τα παραπάνω, λεπτομερώς, περιγράφονται από την παρακάτω διαδικασία: (Χρησιμοποιώ την «ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης»)

256 = 2* 120 +16

120= 7*16 +8

16=2*16 +0

Άρα Το «μέγιστο κοινό μέτρο (που λέγαν οι αρχαίοι) των 256 κα ι120 είναι το 8»

Μια τέτοια διαδικασία, με ακεραίους όπου διαρκώς μειώνονται οι αριθμοί, τελειώνει σε πεπερασμένα βήματα (Εδώ σε τρία βήματα, έχουμε βρει τον ΜΚΔ, σε άλλες περιπτώσεις χρειαζόμαστε και άλλα, αλλά τελειώνει) (Υπάρχει αλγόριθμος που να τελειώνει σε άπειρα βήματα; Ποιά η γνώμη σας;) Τελικά, με τους ακεραίους, δεν έχουμε κανένα πρόβλημα, πάντα βρίσκουμε τον ΜΚΔ για δύο δεδομένους ακεραίους (ή και περισσότερους)

Στον Ευκλείδη, στα «Στοιχεία» του Ευκλείδους και συγκεκριμένα στο βιβλίο 10 , **όταν η παραπάνω διαδικασία τελειώνει (στους ακεραίους πάντα περατώνεται!) λέμε ότι έχουν «ρητή σχέση» "256 προς 120" Αν δεν τελειώνει, (συνεχίζει επ ΄ άπειρον) λέμε ότι έχουν τα δύο μεγέθη «άρρητη σχέση»**

Υπάρχουν μεγέθη με άρρητη σχέση μεταξύ τους;

Παίρνω δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα. Αυτά τα δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα έχουν ρητή σχέση ή άρρητη; (=τελειώνει γι αυτά ο αλγόριθμος του Ευκλείδη ή δεν τελειώνει;)

Μα πώς γίνεται ο αλγόριθμος του Ευκλείδη με δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β;

____________________α

__________________________________β

α<β

Με το μάτι (ή και με τον διαβήτη , βλέπω ότι το α χωρά στο β , 1 φορά κα ι περισσεύει το β-α (με το μάτι όλα αυτά)

Μετά, το β-α χωρά στο α μία φορά (ή μήπως δύο;) και περισσεύει;

ΔΥΣΚΟΛΑ ΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕ ΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ!

Δεν μπορώ να το κάνω με το μάτι! Παρ΄ότι όμως δνε βοηθά το μάτι , βοηθάει ο διαβήτης (κι αυτός μέχρι ενός σημείου!)

Αν φτιάξω ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετη πλευρά την μονάδα, η υποτείνουσα θα είναι ρίζα2 (το σύμβολο δεν μπορώ να το γράψω σε αυτό το περιβάλλον!) Έχω 1 και "ρίζα2" Στους παραπάνω δύο αριθμούς μπορώ να κάνω τον Ευκλείδειο αλγόριθμο; Ας πούμε ότι μπορώ , πώς θα ξέρω αν τελειώνει ή δεν τελειώνει;

Φτιάξετε ένα αρκετά μεγάλο σχήμα με κανόνα και διαβήτη (σωστό σχήμα) ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου Η κάθε μία από κάθε κάθετη, θεωρούμε ότι έχει μήκος την μονάδα. (αυθαίρετα την λαμβάνουμε την μονάδα) Τότε η υποτείνουσα, θα έχει μήκος «ρίζα 2» (Βγαίνει με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που μάθατε στην Β΄Γυμνασίου)

Να κάνουμε το πρώτο βήμα: «Το 1 στο «ρίζα 2 » χωράει ΜΙΑ ΦΟΡΑ και περισσεύει κάτι (προσοχή !!! Αυτό «το κάτι» που περισσεύει, πρέπει να είναι μικρότερο από το 1 (Το 1 είναι διαιρέτης και το «κάτι» το υπόλοιπο. Το υπόλοιπο πρέπει να είναι μικρότερο από τον διαιρέτη! (Στην Α΄ Γυμνασίου δεν το μάθατε;)

Θυμίζω την «ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης»

β:α

β/α

β=απ+υ με 0=<υ<δ

Δοκιμάστε να κάνετε την διαδικασία του Ευκλείδειου αλγόριθμου που οι αρχαίοι έλεγαν με ένα άλλο όνομα (;;;) με το 1 και το «ρίζα 2 και να καταγράψουμε τις δυσκολίες. Αυτό είναι άσκηση...



Η Ευκλείδεια διαίρεση
από Ιωάννης Πλατάρος - Τρίτη, 27 Σεπτεμβρίου 2011, 07:52 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Τί είναι η λεγόμενη «Ευκλείδεια Διαίρεση;»

Με απλά λόγια, είναι εκείνη η διαίρεση, όπου διαιρούμε δύο ακεραίους, βρίσκουμε ένα υπόλοιπο μικρότερο από τον Διαιρέτη και την .....σταματάμε εκεί!

Έχω δηλ. την γνωστή «ταυτότητα της διαίρεσης» όπου

Δ=δ*π +υ , με υ=ο ή 0<υ<δ

Παρ΄ότι όλοι ξέρουμε (;) να κάνουμε διαίρεση αυτή η «ταυτότητα» έχει κάποιες σπουδαίες διαστάσεις που δεν φαίνονται εκ πρώτης όψεως.

Παραθέτω μία, ξεκινώντας με παράδειγμα:

Φανταστείτε έναν οποιοδήποτε τυχαίο φυσικό αριθμό. Ας πούμε τον α . Αν τον διαιρέσω με το 7 τι αποτέλεσμα θα πάρω;

Υπάρχει περίπτωση να είναι πολλαπλάσιο του 7 , οπότε διαιρείται ακριβώς και παίρνω υπόλοιπο 0

Υπάρχει περίπτωση να πάρω υπόλοιπο 1

Υπάρχει περίπτωση να πάρω υπόλοιπο 2

υπόλοιπο 3

υπόλοιπο 4

υπόλοιπο 5

υπόλοιπο 6

Τέλος! Δεν γίνεται να πάρω υπόλοιπο 7 γιατί «θα χώραγε άλλη μια φορά» που λέγαμε στο Δημοτικό!

Ούτε 8, διότι θα χωρούσε άλλη μια φορά και θα έπαιρνα και υπόλοιπο 1

Τα παραπάνω παίρνουν μια πιο συγκεκριμένη οπτική και καταλήγουν σε κανόνα που - επαναλαμβάνω- δεν φαίνεται αμέσως....

«Για οποιονδήποτε φυσικό α, ισχύει : α=7ρ ή α=7ρ+1 ή α =7ρ+2 ή α=7ρ+3 ή α=7ρ+4 ή α=7ρ+5 ή α=7ρ +6 . (ρ φυσικός) Τίποτε πέραν αυτών των περιπτώσεων!

Επτά περιπτώσεις! Για να το καταλάβουμε καλά, ότι είναι απλό και φυσιολογικό:

«Ένας τυχαίος φυσικός α, ή θα είναι μονός ή ζυγός »

Δηλ. α=2ρ ή α=2ρ+1   Μόνο. (Θεωρώντας την διαίρεση με το 2)

Το λέμε και αλλιώς:

ένας τυχαίος αριθμός α ή θα γράφεται ή 3ρ ή 3ρ+1 ή 3ρ+2 ΜΟΝΟ (θεωρώντας την διαίρεση με το 3)»

Πού θα μπορούσε να χρησιμεύσει το παραπάνω;

Για να δούμε μια εφαρμογή:

Έχουμε έναν αριθμό, φυσικό, τον α. Ο α είναι ζυγός . Το $α^2$ τί θα είναι; μονός ή ζυγός;

Απάντηση:

α=2ρ --> $α^2$ =$(2ρ)^2$ -->$α^2$=$4ρ^2$ -->$α^2$=2(2ρ) -->$α^2$=2κ -->$α^2$=ζυγός.

Αντίστροφο πρόβλημα:

Το $α^2$ είναι ζυγός, το ξέρουμε. Το α όμως τι είναι;

(1) Αν το α είναι μονός, τότε α=2ρ+1 -->$α^2$=$(2ρ+1)^2$ --> $α^2$=$4ρ^2$+4ρ+1 (καλά έκανα το ανάπτυγμα;) --->$α^2$=2($2ρ^2$+2ρ) +1 -->$α^2$ 2λ+1 -->$α^2$ =μονός.

(2) Αν το α είναι ζυγός τότε και $α^2$ ζυγός. (το δείξαμε στο προηγούμενο)

Άρα , από (1) κα ι(2) βγαίνει το συμπέρασμα, ότι ΜΟΝΟ όταν ο α είναι ζυγός βγαίνει το $α^2$ ζυγός.

Επομένως

«Αν $α^2$ ζυγός , τότε και το α ζυγός»

Δοκιμάστε μια άσκηση:

«Αν α =7ρ , τότε το $α^2$ θα είναι κι αυτό πολλαπλάσιο του 7;»

Το αντίστροφο τώρα:

«Αν $α^2$ είναι πολλαπλάσιο του 7 , τότε το α είναι και αυτό πολλαπλάσιο του 7; » **(Αυτό θέλει εξέταση ΟΛΩΝ των περιπτώσεων για το α)**

Τι αριθμούς χρησιμοποιούμε όταν μετράμε;
από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 1 Οκτωβρίου 2011, 11:20 ΠΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Μετράμε καρέκλες. Λέμε «7 καρέκλες» Από την στιγμή που θα το πούμε και το εννοούμε, οι 7 καρέκλες είναι 7. Ακριβώς 7 . Δεν έχει νόημα να πεις 7,5 ή 7,1.

Όταν όμως λέμε 7 κιλά ζάχαρη, αυτό ποτέ δεν είναι 7 . Ποτέ των ποτών που θα έλεγε και ο Χατζηχρήστος στις γνωστές του ατάκες στις Ελληνικές ταινίες. Πάντα είναι περίπου. Έχουμε ένα μέτρο, το κιλό, με το ποίο μετράμε. Έχει υποδιαιρέσεις τα γραμμάρια, αλλά και με γραμμάρια να μετρήσω, πάλι θα υπάρχει και κάτι άλλο που θα το εκτιμώ «με το μάτι» και θα το στρογγυλοποιώ. Εξ άλλου, πέρα από ένα σημείο, δεν μας ενδιαφέρει η μεγάλη ακρίβεια. Αν θέλουμε να μετρήσουμε μια απόσταση που θα την διανύσουμε με ένα αυτοκίνητο μας ενδιαφέρει πόσα χιλιόμετρα είναι. Άντε να μας ενδιαφέρει και πόσα μέτρα. Μετά παύει να έχει πρακτικό νόημα μεγαλύτερη ακρίβεια. Αν όμως μας ενδιαφέρει το μήκος μιας χρυσής αλυσίδας που θα αγοράσουμε, τότε θα μετρήσουμε με εκατοστά και χιλιοστά. Αν μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε μεγέθη ατομικά, χρησιμοποιούμε μm , δηλ. 10^{-9} m. (Παίρνω το 1m , το κόβω σε 1 δισεκατομμύριο ίσα κομματάκια και το ένα αυτό το χρησιμοποιώ ως μέτρο.)

Όπως καταλαβαίνει κάποιος, αυτό δεν έχει τέλος. Την μονάδα μπορούμε να την χωρίζουμε σε οσοδήποτε πολλά κομματάκια.

Για να το καταλάβουμε το παραπάνω, ας φαντασθούμε δύο αριθμούς που είναι πάρα πολύ κοντινοί. Για παράδειγμα:

1,5723 και 1,5724

Οι παραπάνω αριθμοί είναι πολύ κοντινοί, καθώς διαφέρουν κατά 1 δεκάκις χιλιοστό (0,0001)

Ωστόσο, ανάμεσά τους υπάρχουν ....άπειροι άλλοι αριθμοί!

Πώς μπορώ να το καταλάβω αυτό;

Ας τους φανταστώ και τους δύο, με ένα μηδενικό στο τέλος. Το μηδενικό στο τέλος, δεν προσθέτει κάτι στο μέγεθός τους φυσικά

1,57230 και 1,57240

Τώρα δεν φαίνεται ότι ανάμεσά τους χωράμε άλλοι 9;

1,57230

1,57231

1,57232

1,57233

1,57234

1,57235

1,57236

1,57237

1,57238

1,57239

1,57240

Αν έβαζα δύο μηδενικά στο τέλος, θα χωρούσαν ανάμεσά τους άλλοι 99

Αν έβαζα τρία μηδενικά , 1,5723000 και 1,5724000 θα έβλεπαν ότι θα χωρούσαν άλλοι 999

Έτσι μπορώ να βγάλω το συμπέρασμα, ότι « Αν δύο αριθμοί είναι όσο κοντά θέλουν , τότε και γω μπορώ να βάλω ανάμεσά τους όσους αριθμούς θέλω!»

Το παραπάνω να το πώ με ακριβέστερη μαθηματική γλώσσα:

«Ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς α και β , υπάρχουν άπειροι άλλοι (διαφορετικοί μεταξύ τους) ρητοί»

Και μια άσκηση να την σκεφθείτε:

Δίνουμε δύο κλάσματα

7/51 και 8/51

Μπορούμε ανάμεσα σε αυτά τα δύο κλάσματα (όπως και προηγουμένως) να βρούμε άπειρα άλλα διαφορετικά κλάσματα; (Δεν είναι ανάγκη να δούμε τα δύο κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς)

Οι δεκαδικοί αριθμοί....
από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 1 Οκτωβρίου 2011, 10:28 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Στην πράξη, οι δεκαδικοί, είναι σχεδόν οι μόνοι αριθμοί που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή.

Ξέρει όμως κάποιος ποίους λέμε «δεκαδικούς αριθμούς;»

Νομίζω ότι τους ξέρετε όλοι....

Είναι οι αριθμοί που γράφουμε κάθε μέρα στα κομπιουτεράκια....

Το 5, το 6 το 7, το 1000, το 20011....

Το 12,5 το 17,456 το 0,00923 κτλ

Με το που τους γράφουμε κάθε μέρα, μας δημιουργείται η απολύτως ψευδής εντύπωση ότι όλοι κι όλοι, αυτοί είναι οι αριθμοί που υπάρχουν....

Δεν πάω ακόμα στους άρρητους. Τους ξεχνάω. (Δεν τους έχουμε μάθει ακόμη επισήμως στην ύλη των Μαθηματικών, αν και έχουν γίνει νύξεις στο Γυμνάσιο.)

Μένω στους ΡΗΤΟΥΣ

ΡΗΤΟΣ: Λέγεται κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ όρους.

Δεν έχω καμία αμφιβολία, ότι όλοι οι δεκαδικοί , είναι ρητοί:

λ.χ. 0,0023 =23/10000

5 =5/1

2,45=245/1000

κτλ

Αν το καλοσκεφθούμε (Δεν είναι εύκολο να το σκεφθεί κανείς με τα στραβά νοήματα που εισπράττουμε!) οι δεκαδικοί, είναι στην πραγματικότητα, οι ρητοί, των οποίων οι διαιρέσεις από τις οποίες προκύπτουν ΤΕΛΕΙΩΝΟΥΝ !!!

Μην το μπερδέψετε με την «Ευκλείδεια διαίρεση» όπου δεν συνεχίζουμε την διαίρεση!

Εννοώ, ότι αν έχουμε μια διαίρεση ακέραιο με ακέραιο (δηλ. ένα ρητό αριθμό) αυτή η διαίρεση μπορεί να τελειώνει ή να μην τελειώνει, να είναι ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Κάποιες διαιρέσεις ΤΕΛΕΙΩΝΟΥΝ

Κάποιες δεν τελειώνουν ποτέ, είναι Περιοδικές.

Για παράδειγμα

Αν εκτελέσω την διαίρεση 7/2 θα βρω 3,5 ακριβώς

Αν εκτελέσω την διαίρεση 1/3 , θα βρω 0,33333333333333333333333...(άπειρα τριάρια)

Η πρώτη διαίρεση τελειώνει ΑΚΡΙΒΩΣ, η δεύτερη ΔΕΝ ΤΕΛΕΙΩΝΕΙ ΠΟΤΕ!

Εμείς κάθε μέρα χρησιμοποιούμε ρητούς δεκαδικούς που τελειώνουν . Αυτοί αντιλαμβανόμαστε ότι είναι άπειροι . Και οι άλλοι που δεν τελειώνουν είναι πιο άπειροι! (Έχει άραγε νόημα αυτό το «πιο άπειροι» 'ή είναι σχήμα λόγου;)

Θα το διατυπώσω σαφώς το ερώτημα:

Εκτελώ μια διαίρεση φυσικός δια φυσικό. *(Έχω ένα φανταστικό σακούλι, που χωράει τους άπειρους φυσικούς και παίρνω δύο στην τύχη!)* Το αποτέλεσμα θα είναι ή δεκαδικός

τερματιζόμενος ή δεκαδικός περιοδικός. Το ερώτημα (που δεν είναι καθόλου εύκολο να απαντηθεί με αυτά που ξέρετε) είναι:

Ποιά η πιθανότητα να πάρω τερματιζόμενο και ποιά η πιθανότητα να πάρω περιοδικό;

Αν σας αποκαλύψω την απάντηση, **ΔΕΝ ΘΑ ΤΗΝ ΠΙΣΤΕΥΕΤΕ!**

Για ψάξτε το όσοι θέλετε και σε κάποια φάση, θα ασχοληθούμε και με αυτό το ερώτημα! (Κάπου κάτι έχετε πει στην Β΄Γυμνασίου, αλλά δεν ξέρω αν έχει μείνει στο μυαλό!) Πολλές φορές, έχουμε μια αλήθεια μπροστά μας, αλλά δεν την βλέπουμε γιατί δεν μας προβληματίζει και την θεωρούμε ως «φυσική» με τον ίδιο τρόπο που και μια γάτα βλέπει τηλεόραση, αλλά δεν προβληματίζεται καθόλου για το πώς και το γιατί της....

Μια βασική άσκηση που περιέχει και την θεωρία του Ευκλείδειου Αλγορίθμου.
από Ιωάννης Πλατάρος - Παρασκευή, 7 Οκτωβρίου 2011, 04:39 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Θέλω να βρω τον ΜΚΔ(α,β) με α<β

Πρώτο βήμα:

$β=α*π+υ$

Δεύτερο βήμα:

$α=κ*υ+υ_1$

Τρίτο βήμα:

$υ=λ*υ_1 + υ_2$

Τέταρτο βήμα.........

....

Έως ότου βρούμε 0 υπόλοιπο (Στην Ανθυφαίρεση φυσικών αριθμών (:=Ευκλείδειος Αλγόριθμος) πάντα θα βρούμε στο τέλος 0. Αν όμως είναι να ανθυφαιρέσουμε αντί φυσικούς Ευθύγραμμα τμήματα ή άλλα μεγέθη, τα πράγματα είναι πιο δύσκολα)

Το θέμα αφορά την ανθυφαίρεση ακεραίων

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ο ΜΚΔ $(α,β)$=ΜΚΔ$(α,υ)$=ΜΚΔ$(υ,υ_1)$=...=(τελευταίο βήμα όπου έχω 0 υπόλοιπο))ΜΚΔ$(υ', υ'')$ $=υ''$

Σκεφθείτε το και εξηγήστε το....

Βοήθεια:

«Αν ένας αριθμός διαιρεί (:=χωρά ακριβώς ακέραιες φορές) δύο άλλους , τότε θα διαιρεί και την διαφορά τους.»

Ξεκινήστε από αυτό, με την βοήθεια και της ταυτότητας της διαίρεσης.

Κι άλλη μια βοήθεια:

Τους φυσικούς αριθμούς α και β , τους διαιρεί και τους δύο, ο δ

Οι παρακάτω παραστάσεις έχουν δύο όρους:

α+β

α-β

κα+μβ (κ,μ, φυσικοί)

α-λβ

ρα-β

Από κάθε αλγεβρική παράσταση βγαίνει κοινός παράγοντας το δ (γιατί;)

Οι δεκαδικοί και οι δεκαδικοί περιοδικοί....
από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 8 Οκτωβρίου 2011, 09:26 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Γιατί οι δεκαδικοί είναι ρητοί;

Διότι κάθε δεκαδικός, μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με όρους ακεραίους

Να πώς:

1,2 = 12/10

0,1 =1/10

5% =5/100

5=5/1

-8=-8/1

457,2436097584598 = 452436097584598 / 1000000000000

Τα παραπάνω τα μάθατε στην Β΄Γυμνασίου

Τί άλλο μάθατε;

Δεκαδικοί περιοδικοί, με άπειρα δεκαδικά ψηφία, είναι ρητοί

Παράδειγμα 1:

0,33333333333......... (οι τελείες δείχνουν το ατελεύτητο. Μπορεί να τους γράψουμε και 0,3 με περισπωμένη στο 3. Εδώ, σε αυτή την διεπαφή, δεν μπορώ να το κάνω.)

Βήμα 1ο : Βαπτίζω τον αριθμό 0,33333333...... ως χ. Δεν σας το έχει πει κανένας, αλλά το να δεις μια άπειρη αναπαράσταση με αριθμούς και να την θεωρήσεις ως «αριθμό», έχεις κάνει ένα λογικό πήδημα. Δηλ. πού το ξέρω ότι «αυτό το άπειρο πράγμα» (δηλ. το 0,33333333333333.......) είναι αριθμός; Με αυτά που ξέρω, αυτή την παράσταση την άπειρη μπορώ να την περιορίσω. λ.χ.

0,3<0,333333333......<0,4

Μπορώ να την περιορίσω πιό πολύ;

0,33<0,333333333....<0,34

Ακόμα πιο πολύ στενεύω το διάστημα που περιορίζω την παράσταση

0,333<0,33333333333......<0,334

0,3333<0,33333333333......<0,3334

0,33333<0,33333333333......<0,33334

0,333333<0,33333333333......<0,333334

0,3333333<0,33333333333......<0,3333334

0,33333333<0,33333333333......<0,33333334

0,333333333<0,33333333333......<0,333333334

0,3333333333<0,33333333333......<0,3333333334

0,33333333333<0,33333333333......<0,33333333334

Βλέπετε τον κανόνα με τον οποίο σφίγγω τον κλοιό γύρω από το 0,33333333........;

Είναι σαν μια θηλιά που διαρκώς στενεύει....

Κάθε σειρά είναι μέσα σε όλες τις προηγούμενες.

Η πιο ανοιχτή θηλιά είναι η πρώτη, η δεύτερη έχει στενέψει και είναι μέσα στην πρώτη, η τρίτη πιο στενή και είναι μέσα στην δεύτερη κοκ

Σε κάθε βήμα του κλοιού, πλησιάζω το 0,333333333333......... και από τα δεξιά και από τα αριστερά όλο και πιο πολύ!

Αν μπορείς να κάνεις μια τέτοια διαδικασία και μια παράσταση χ (έτσι έχω βαπτίσει την παράσταση 0,3333333......) να την εγκλωβίζεις σε διαρκώς μικρότερα διαστήματα, όπου το επόμενο είναι μέσα στο προηγούμενο, τότε αν μπορείς να το κάνεις ατελεύτητα αυτό (εδώ μπορώ να προσθέτω κάθε φορά ένα τριάρι δεξιά και αριστερά και να στενεύω τον κλοιό) **αυτό**

οδηγεί στην ύπαρξη ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ. Αν μπορώ να κάνω αυτή την διαδικασία, να εγκλωβίζω διαρκώς την «οντότητα» 0,333333333...... σε διαρκώς στενότερα όρια, απεριόριστα, σαν να βάζω άπειρες κούκλες «ματούσκα» την μία μέσα στην άλλη, τότε είμαι σίγουρος ότι έχω να κάνω με έναν αριθμό και όχι με κάτι άλλο. Αυτή η διαδικασία μοιάζει παράξενη, αλλά έτσι είναι.

Επαναλαμβάνω για να καταλάβετε ΤΙ ΕΙΠΑ:

Αν δω μια παράσταση του τύπου 0,33333333...... (με άπειρα τριάρια, ποιος μου λέει ότι αυτή η παράσταση είναι αριθμός; ΚΑΝΕΙΣ! **Δεν το ξέρω!**

Υπάρχουν παραστάσεις με αριθμούς ΠΟΥ ΔΕΝ ΠΑΡΙΣΤΑΝΟΥΝ ΑΡΙΘΜΟΥΣ;

Βεβαίως!

- **1/0**
- **τετραγωνική ρίζα του -4**
- **-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1........**

Η τελευταία άπειρη παράσταση έχει πολύ πλάκα!

Πριν μόλις 150 χρόνια που για τα μαθηματικά είναι λίγα χρόνια δεδομένου ότι είναι μια επιστήμη με ρίζες προ Χριστού (ας πούμε από το 600π.Χ., την εποχή του Θαλή που έκανε τα μαθηματικά επιστήμη, εισάγοντας την έννοια της απόδειξης...

Νόμιζαν ότι η παραπάνω άπειρη παράσταση ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΕΝΑΝ ΑΡΙΘΜΟ

Η παράσταση, αν δεν το καταλάβατε ήδη, προσθέτει και αφαιρεί το 1 ΑΠΕΡΙΟΡΙΣΤΑ!

Ποιός αριθμός είναι; (προσοχή! Δεν παριστάνει αριθμό, αλλά οι άνθρωποι ΤΟΤΕ πίστευαν ότι...παριστάνει!)

Λέει ο ένας:

Η παράσταση είναι διαρκώς πλην ένα συν ένα άρα είναι το ΜΗΔΕΝ (**πολύ λογικό , ΕΚ ΠΡΩΤΗΣ ΟΨΕΩΣ!**)

Λέει ένας άλλος:

-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1.............=

-1 -(-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1..........) Δηλ. κράτησε τον πρώτο προσθετέο και τους άλλους τους έβαλε σε μια παρένθεση, αλλάζοντας τα πρόσημα)

Η παρένθεση όμως είπαμε κάνει ΜΔΕΝ!

άρα

=-1-0 =

=-1

Βρήκε πλην ένα, ενώ πριν είπαμε ότι είναι μηδέν!!!!

Άλλος, έκανε άλλο:

Σ=-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1.........

Σ= -1 -(-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1.........) (άλλαξε τα πρόσημα και τους έβαλε μετά τον δεύτερο προσθετέο σε παρένθεση)

Σ=-1 -Σ -->

2Σ=-1

Σ=-1/2 (!!!!)

Δηλ. η παράσταση κάνει και -1 κάνει και 0 κάνει και -1/2 (!!!)

Κάποιοι σοφοί και διανοούμενοι, διάσημοι Μαθηματικοί είπαν και διάφορα μεταφυσικά γύρω από αυτό. Ότι λ.χ. είναι το μένον από όπου «παράγεται από το μηδέν το είναι! » κτλ Απίστευτες ΒΛΑΚΕΙΕΣ!

Αν σας πώ μάλιστα ότι αυτά τα έγραφαν και διάσημοι μαθηματικοί που είχαν πολλές φορές μεγαλύτερα μυαλά από τα δικά μας, **μας δίνει και σε μας το δικαίωμα στην ....βλακεία!**

Αφού γίγαντες της σκέψης **(κυριολεκτώ σε αυτό) έκαναν τόσο γελοία λάθη, μπορούμε να κάνουμε και μεις!**

Η βλακεία έγκειται ΜΟΝΟ στο γεγονός του να κάνουμε το ΙΔΙΟ ΛΑΘΟΣ ΠΟΛΛΕΣ ΦΟΡΕΣ! («το δις εξαμαρτείν ουκ ανδρός σοφού!»)

Συνοψίζω τώρα μαθηματικά ΤΗΝ ΑΙΤΙΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΛΑΘΟΥΣ:

Αν δούμε μια παράσταση με αριθμούς, ΔΕΝ ΠΑΕΙ ΝΑ ΠΕΙ ΝΤΕ ΣΩΝΕΙ ΚΑΙ ΚΑΛΑ, ΟΤΙ ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΑΡΙΘΜΟ!

Η πιο μπροστά περιγραφείσα διαδικασία όπου περιόριζα μια παράσταση διαρκώς σε θηλιά όπου η νέα θηλιά ήταν μέσα στην προηγούμενη και μπορούσα να το κάνω αυτό ατελεύτητα, μας δίνει μια συνθήκη όπου μας επιτρέπει να αποφανθούμε αν υπάρχει ή όχι ένας αριθμός . Για την ιστορία και μόνον, η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως «Τομή Ντέντεκιντ» Δεν αποτελεί ύλη αυτό της εργασίας, το λέμε για ιστορικούς λόγους.

Συνεχίζω αυτό που άφησα στην μέση:

χ=0,3333333333333.............

10χ=3,33333333333333.............. (αφαιρώ κατά μέλη, από το δεύτερο το πρώτο))

9χ= 3,000000000000000.........

χ=3/9

χ=1/3

Άλλο:

α= 2,3454545454545454545454545454545....... (το 45 είναι η περίοδος , το επαναλαμβανόμενο τμήμα)

1000α =2345, 45454545454545454545454545454545454545..

Πολλαπλασίασα με το 10, 100, 1000, όσο χρειάζεται να καλύψω ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟ! Δηλ. η υποδιαστολή να πάει ΤΡΕΙΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΕΞΙΑ.

Αν αφαιρέσω κατά μέλη έχω:

999α= 2343,00000000000000000000000000000..........

999α=2343

α=2342/999 (ρητός αριθμός)



[Γιατί μετράμε με «δεκάδες και όχι λ.χ. με «πεντάδες»;](#)

από [Ιωάννης Πλατάρος](#) - Σάββατο, 22 Οκτωβρίου 2011, 02:21 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Οι μαθηματικοί θα έλεγαν το ίδιο ερώτημα του τίτλου ως **«γιατί χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και όχι λόγου χάριν το πενταδικό;»**

<u>Με άλλη λόγια:</u>

«Γιατί για να γράψουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς (άπειρους στο πλήθος) πρέπει να χρησιμοποιούμε δέκα ψηφία (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) και όχι λ.χ. πέντε ή δύο ή δεκαπέντε;

Η απάντηση είναι ότι ο μόνος λόγος είναι, **ότι έχουμε μόνο δέκα δάκτυλα** και κάθε φορά που μετρούσαμε κάποιο μεγάλο πλήθος και μας .....τελείωναν, κάναμε κάποια διακοπή, μετρούσαμε «ένα τέλειωμα των δακτύλων» με κάποια γραμμούλα που γράφαμε στο χώμα ή ένα πετραδάκι που βάζαμε σε ένα σωρό και εξακολουθούσαμε να μετράμε λ.χ. τα .....πρόβατα κάνοντας μια γραμμούλα ή βάζοντας ένα πετραδάκι στο σωρό. (Κάναμε σωρούς με πετραδάκι που ήταν ΔΕΚΑΔΕΣ!) Αν μετά πηγαίναμε να μετρήσουμε και τις δεκάδες και μας τελείωναν τα δάκτυλα, βάζαμε μια **πολύ μεγάλη πέτρα** σε έναν άλλο χώρο και είχαμε τις εκατοντάδες κτλ !

Ο λόγος δηλαδή που τελειώνουμε στο δέκα και μετά δέκα δεκάδες κάνουν μια εκατοντάδα και δέκα εκατοντάδες κάνουν μια χιλιάδα κτλ είναι ότι έχουμε .....ΔΕΚΑ ΔΑΚΤΥΛΑ!

Γίνεται δηλαδή να μετρήσουμε κι αλλιώς;

Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να μετρήσουμε με όσα «δάκτυλα» θέλουμε αφού έχουμε καταλάβει «το κολπάκι» της απαρίθμησης (=καταμέτρησης)

Ας πάμε στον Πλανήτη Πενταδάκτυλο όπου εκεί οι άνθρωποι έχουν δύο χέρια με δύο δάκτυλα στο ένα χέρι και τρία δάκτυλο στο άλλο! (Τέρατα είναι, όσα δάκτυλα θέλουν έχουν!)

Αυτοί πώς ΘΑ μετρούσαν όταν ανεκάλυπταν την απαρίθμηση;

Δεν είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιούσαν τα δικά μας σύμβολα αλλά μάλλον θα ήταν κι αυτά πέντε στον αριθμό. Θα μπορούσαν να είναι τα

^ για το 0

! για το 1

@ για το 2

για το 3

$ για το 4

Δεν χρειάζονται άλλα είναι πέντε (μαζί με το 0)

Αλλά για να μην μπερδευτούμε, θα αποκωδικοποιήσουμε τα δικά τους σύμβολα με τα δικά μας , δηλ. 0,1,2,3,4.

Πώς θα μετρούσαν;

Πάμε:

1 (δεν θα το λένε «ένα» θα το λένε κάπως αλλιώς, ας πούμε «γκου» , αλλά για να μην μπερδευτούμε, το αποκωδικοποιούμε και μεις και το λέμε «ένα»

2 («δύο»)

3 («τρία»)

4 («τέσσερα»)

10 (δεν το λένε «δέκα» αλλά «μια πεντάδα» με μια λέξη!)

11 (μια πεντάδα ένα)

12 (μια πεντάδα δύο)

13 (μια πεντάδα τρία)

14 (μια πεντάδα τέσσερα)

20 (δύο πεντάδες, μηδέν μονάδες, «δυοπεντάδες»)

21 (δυοπεντάδεσένα)

....

....

....

43 (τέσσερις πεντάδες τρία)

44 (τέσσερις πεντάδες τέσσερα)

100 (πεντε-πεντάδες)

101 (πεντεπεντάδες ένα)

....

....

κτλ

Το ίδιο δεν κάνουμε και με τα δέκα που έχουμε εμείς οι ....Γήινοι;)

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10 (ένα τέλειωμα δακτύλων που λέμε «δέκα»)

11 (δέκα ένα , που για ιατρικούς λόγους διαβάζουμε ανάποδα ένα-δέκα, εν-δέκα ένδεκα, έντεκα)

12 δυό-δέκα το οποίο κι αυτό διαβάζουμε ανάποδα δυόδεκα-δώδεκα)

13 (δεκατρία που διαβάζουμε συμβατικά, ενώ οι Γάλλοι αν καλώς έχω πληροφορηθεί έχουμε τέτοια «ειδικά ονόματα» μέχρι το 15)

14

15

16

17

18

19

20 (δύο δεκάδες που λέμε «είκοσι»)

30 (τρεις δεκάδες που λέμε «τρι-άντα»)

40 (τέσσερις δεκάδες που λέμε («τεσ-σαρα-ντα»)

50 (πεντε δεκάδες που λέμε «πεν-ήντα»)

60 (που λέμε «εξ-ήντα»)

70 (που λέμε «εβδομ-ήντα»

80 «που λέμε «ογδ-όντα» ή ....«ογδομήντα(!)» που μου είπε ένας γεράκος μια φορά αναφερόμενος στην ηλικία του κάνοντας το ίδιο λάθος (αναλογικό) που λέμε αυτή την περίοδο χιλιάδες Έλληνες τον Οκτώβριο ως «ΟκτώΜβριο»)

90 (που λέμε «ενεν-ήντα»)

100 που είναι δύο «δεκαδεκάδες» και που λέμε ειδικώς «εκατό(ν)»

Αν δεν καταλάβατε «τι παίζει» διαβάστε άλλη μια φορά το κείμενο και ελπίζω να το κατανοήσατε.....

Αν πάντως αντί για 10 ή 5 «παίξω» με το 2, φτιάχνω το δυαδικό σύστημα όπου χρησιμοποιώ το 0 και το 1 ΜΟΝΟ για να φτιάξω ΟΛΟΥΣ τους αριθμούς. (Το λέμε δυαδικό, αλλά δεν χρησιμοποιούμε το 2, όπως το πενταδικό που ΔΕΝ χρησιμοποιούμε το 5 , όπως ΔΕΚΑΔΙΚΟ, όπου ΔΕΝ χρησιμοποιούμε το ΔΕΚΑ ΩΣ ΨΗΦΙΟ (σύμβολο μόνο του, ξεχωριστό για το δέκα, αλλά το γράφουμε ως συνδυασμό με άλλα δύο ψηφία , το 1 και το 0 , δηλ. 10=δέκα.

Για να είναι άρρητος ένας αριθμός , θα πρέπει στο δεκαδικό του ανάπτυγμα να έχει άπειρα ΜΗ περιοδικά ψηφία.

*Το παραπάνω, **δεν είναι δυνατόν να αποτελεί κριτήριο**, αφού ουδείς μπορεί να μετρήσει άπειρα*

ψηφία (πλην - ίσως - του Τσακ Νόρις που έχει μετρήσει μέχρι το άπειρο, δύο φορές!)

Για να είναι άρρητος ένας αριθμός θα πρέπει να μην μπορεί να εξισωθεί με κλάσμα με ακεραίους όρους

Το παραπάνω, είναι κριτήριο, αφού συνήθως ***θεωρούμε ότι αυτό είναι εφικτό*** *και κάνοντας απολύτως λογικά βήματα, καταλήγουμε σε κάτι που δεν έχει τόπο για να σταθεί (άτοπο) Αφού ΔΕΝ κάναμε λάθη στην πορεία των συλλογισμών και καταλήξαμε σε (με συγχωρείτε για την έκφραση) μια σαχλαμάρα, πάει να πει ότι* ***ΞΕΚΙΝΗΣΑΜΕ ΑΠΟ ΛΑΘΟΣ!*** *Δηλαδή, κακώς; είπαμε ότι εκφράζεται ως κλάσμα με ακέραιους όρους (=ρητός) άρα ΔΕΝ είναι σωστό αυτό, δεν εκφράζεται ως κλάσμα με ακέραιους όρους , άρα είναι ΑΡΡΗΤΟΣ.*

Θα έχετε ακούσει την έκφραση «αν η γιαγιά μου είχε ρουλεμάν θα ήτανε πατίνι» Για να το καταλάβετε πλήρως, πρώτα να σας πώ για το πατίνι:

Τα παλιά τα χρόνια, δεν υπήρχαν τροχοί αντοχής , ενώ τα παιγνίδια ήταν ιδιοκατασκευές (τα έφτιαχνε ο κάθε ένας μόνος του και χειροποίητα)

Ένα ρουλεμάν είναι συνήθως δύο κυλινδρικές ατσάλινες επιφάνειες ανάμεσα στις οποίες έχουν εγκλωβιστεί ατσάλινα σφαιρίδια. Αν σφηνώσεις ένα ξύλο μέσα στην κυλινδρική επιφάνεια, η εξωτερική επιφάνεια, με την βοήθεια των σφαιριδίων περιστρέφεται γύρω από την πρώτη και έτσι έχω τροχό μικρό και τεράστιας αντοχής. Με αυτά έφτιαχναν τροχούς για πατίνια!

Πάμε τώρα στην έκφραση «Αν η γιαγιά μου είχε ρουλεμάν θα ήτανε πατίνι» Σύμφωνα με την κοινή λογική, αυτό είναι ένα ΛΟΓΙΚΟ συμπέρασμα (λέω «κοινή λογική», γιατί αν το αυστηροποιήσω, μπορεί και να είναι πωλητής ανταλλακτικών μηχανών η γιαγιά!)

Σε μια λιγότερο αυστηρή λογική λοιπόν, η παροιμιώδης αυτή λαϊκή έκφραση μπορεί να θεωρηθεί (με λίγες επιφυλάξεις) ΕΝΑ ΛΟΓΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.

Πράγματι:

Αν η γιαγιά φέρει ρουλεμάν (μάλλον , συνήθως, με αυτά που ξέρουμε) είναι πατίνι, και άρα θα τσουλάει στην κατηφόρα. Αλλά αφού η γιαγιά μου ΔΕΝ τσουλάει στην κατηφόρα λόγω κινητικών προβλημάτων, μάλλον ΔΕΝ είναι πατίνι!

Δεν ξέρω αν μπορείτε μέσα από την πλάκα να διακρίνετε τι θέλω να πώ:

Η μέθοδος της «εις άτοπον απαγωγής» είναι μια αποδεικτική λογική διαδικασία που εκμεταλλεύεται μια βασική λογική αρχή:

Κάποιος, κάποια, κάτι, έχουν την ιδιότητα Α ή ΔΕΝ την έχουν την ιδιότητα Α. Ένα από τα δύο συμβαίνει. Αν συμβαίνει το ένα , τότε δεν συμβαίνει το άλλο και αν συμβαίνει το άλλο, δεν

συμβαίνει το ένα.

<u>Παραδείγματα:</u>

(Σας το είπα με μορφή αστείου στην τάξη, αλλά δεν ξέρω πόσοι μένετε στο αστείο)

Ένα σώμα έχει μαύρο χρώμα (με την συμβατική σημασία) ή όχι μαύρο . Τίποτε άλλο. Δεν μπορεί να είναι ΚΑΙ ΜΑΥΡΟ ΚΑΙ ΟΧΙ ΜΑΥΡΟ.

Για το μαύρο, το καταλαβαίνουμε. Για το «όχι μαύρο» τί καταλαβαίνουμε;

Ο πολύς κόσμος λέει ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΑ **«το αντίθετο του μαύρου είναι το άσπρο!»** Αυτό έχει μια φυσική λογική, αλλά στην λογική όταν λέμε «όχι μαύρο» εννοούμε οποιοδήποτε άλλο χρώμα πλην του μαύρου (κίτρινο, φούξια, λιλά, μωβ, γκρίζο, γαλάζιο, πράσινο, πορτοκαλί, ΟΛΑ !)

Επομένως, τώρα γίνεται ΛΟΓΙΚΑ ΚΑΘΑΡΟ:

Ένα σώμα είναι ή μόνο μαύρο ή ΟΧΙ μαύρο . Τίποτε άλλο τρίτο δεν γίνεται να είναι. Αυτόν τον κανόνα τον συναντάμε στην λογική του Αριστοτέλους και είναι γνωστός με το όνομα *«Αρχή της του μέσου ή τρίτου αποκλίσεως»*

Αφού ξεκαθαρίσαμε ότι το «όχι μαύρο» δεν είναι το άσπρο, θα πάω σε ένα ακόμα πιο προκλητικό θέμα:

<u>Θέτω το ερώτημα:</u>

«Ένας άνθρωπος έχει φύλο άρρεν ή όχι άρρεν» ΤΙΠΟΤΕ ΑΛΛΟ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ!

ή «άρρεν» ή «όχι άρρεν»

<u>Το λέω σε Δημοτική απόδοση:</u>

«Ένας άνθρωπος, είναι ή σερνικός ή όχι σερνικός!»

ΤΙΠΟΤΕ ΑΛΛΟ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ!

Τα γράφω τα παραπάνω για να σας δώσω την ευκαιρία να κάνετε την....λανθασμένη σκέψη!

<u>Ποιά;</u>

Μήπως σκεφτήκανε πού κατατάσσονται οι ....γκέη;

Αν το θεωρήσατε ως ένσταση στον ισχυρισμό, κάνατε λάθος!

Να γιατί:

Ένας είναι ή άρρεν ή όχι άρρεν (=θήλυ ή «τρίτο φύλο!»)

Το καταλάβαμε;

<u>Πάμε στα μαθηματικά:</u>

«Ένας αριθμός είναι ή θετικός ή όχι θετικός»

Όταν λέμε «όχι θετικός» δεν εννοούμε μόνο τους αρνητικούς, αλλά και τους αρνητικούς και το μηδέν . Όλοι είναι «όχι θετικοί»

Το να μπορείς να ξεχωρίζεις μια αντίθετη λογική πρόταση δεν είναι κάτι εύκολο. Θέλει κι άλλη εμπέδωση:

Λέμε:

«Όλοι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»

Η αντίθετη πρόταση ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ;

(Σκεφτείτε την ΤΩΡΑ και μην διαβάζετε παρακάτω!)

//

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

(Δεν είπαμε να μην κλέβουμε; Διατύπωσε την αντίθετη πρόταση!)

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

(Το παίρνει το ποτάμι:)

ΟΧΙ «Όλοι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»

ΙΣΟΝ

«ΟΧΙ ΟΛΟΙ οι μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»

ΙΣΟΝ

«ΜΕΡΙΚΟΙ ή ΚΑΝΕΝΑΣ μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»

Δηλαδή, η πρώτη πρόταση και η αντίθετή της καλύπτουν ΟΛΗ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ (και την θετική και την αρνητική).

Πάμε πάλι στους ρητούς και άρρητους:

ΡΗΤΟΣ=ΟΧΙ ΑΡΡΗΤΟΣ και ΑΡΡΗΤΟΣ =ΟΧΙ ΡΗΤΟΣ

Η μία έννοια είναι αντίθετη της άλλης . Μόνο αυτές τις έννοιες έχουμε δικαίωμα να λέμε «αντίθετες»

Πάμε στην **«εις άτοπον απαγωγή»**

Αν υποθέσεις ότι ένας αριθμός είναι ΡΗΤΟΣ

και μετά κάνεις ένα λογικό , σωστό βήμα και καταλήξεις σε συμπέρασμα Α

και μετά ένα λογικό , σωστό βήμα και καταλήξεις σε συμπέρασμα Β

και μετά ένα λογικό σωστό βήμα και καταλήξεις σε συμπέρασμα Γ

....

Και τέλος , ένα λογικό σωστό βήμα και καταλήξεις σε ένα συμπέρασμα Ω .

Κοίτα τώρα τι μπορεί να συμβαίνει:

Είσαι σε θέση να αξιολογήσεις, ότι το Ω που κατέληξες, σύμφωνα με αυτά που έχουν συμφωνήσει όλοι οι άνθρωποι είναι μια σαχλαμάρα (δηλ. ένα άτοπο! Κάτι που ΔΕΝ ΣΤΕΚΕΙ)

Μπορείς να πεις ΤΙ ΦΤΑΙΕΙ;

Όλα τα ενδιάμεσα βήματα είναι ΣΩΣΤΑ!

Τί φταίει;

Αν όλα τα ενδιάμεσα βήματα είναι σωστά, και φθάσαμε σε άτοπο, ΦΤΑΙΕΙ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ! Φταίει ότι υποθέσαμε ότι ο συγκεκριμένος αριθμός είναι ρητός! Άρα ΔΕΝ Είναι ρητός, είναι άρρητος!

Με τον παραπάνω τρόπο, βγάζουμε συμπέρασμα για την φύση ενός αριθμού, χωρίς να μπορούμε να δούμε όλη την φύση του (ποιός μπορεί να δει όλα τα άπειρα ψηφία του που είναι μη περιοδικά;)

Οι αρχαίοι Έλληνες ήξεραν ότι αν δύο μεγέθη (αριθμοί, ευθύγραμμα τμήματα) έχουν περατούμενη ανθυφαίρεση τότε μεταξύ τους έχουν ΡΗΤΗ σχέση. Συνήθως, συνέκριναν ένα μέγεθος με την μονάδα. Επειδή η Πυθαγόρεια αντίληψη ήταν ότι «η μονάς αρχή των πάντων» τους είχε «κολλήσει», ότι όλα τα άλλα είναι είτε πολλαπλάσια ακέραια της μονάδας είτε ακέραια υποπολλαπλάσια της μονάδας. ΕΚΑΝΑΝ ΛΑΘΟΣ! (Ο Ίππασος που βρήκε το λάθος, χάθηκε , μάλλον τον έπνιξαν αυτοί που δεν άντεχαν σε μια αλήθεια που άλλαζε άρδην τα πιστεύω τους)

Προσέξετε τώρα ένα πολύ σοβαρό πραγματάκι:

Ένας αριθμός έχει πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα ----->Είναι ρητός

Ένας αριθμός έχει περιοδικό (άπειρο) δεκαδικό ανάπτυγμα --------> Είναι ρητός

Ένας αριθμός έχει μη περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα -------> Είναι άρρητος

Ένας αριθμός, σε σχέση με την μονάδα , έχει πεπερασμένη ανθυφαίρεση ----> Είναι ρητός

Ένας αριθμός, σε σχέση με την μονάδα, έχει περιοδική (άπειρη) ανθυφαίρεση ----> Είναι άρρητος

Ένας αριθμός, σε σχέση με την μονάδα έχει άπειρη ανθυφαίρεση --->άρρητος

Δηλαδή:

Ένας δεκαδικός περιοδικός είναι πάντα ρητός

Ένας που έχει περιοδική ανθυφαίρεση με την μονάδα, είναι άρρητος!

Πώς όμως θα μπορούμε να καταλαβαίνουμε ότι κάποιος έχει άπειρη περιοδική ανθυφαίρεση;

(ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ)

Επεξεργασία | Διαγραφή | Μόνιμος σύνδεσμος
[Τροποποιημένο: Τρίτη, 25 Οκτωβρίου 2011, 08:52 ΜΜ]
Comments (0)



Πώς γράφεται το ρητός αριθμός 1/3 στο δεκαδικό και πώς στο τριαδικό;

από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 22 Οκτωβρίου 2011, 05:02 ΜΜ

Οποιονδήποτε στη σελίδα

Αν εκτελέσουμε την Ευκλείδεια διαίρεση 1: 3 βρίσκουμε πηλίκο 0 και υπόλοιπο 3

Η ταυτότητα της Ευκλειδείου διαιρέσεως είναι 1=0Χ3 +1 με 0<ή =1 και 1<3

Η Ευκλείδεια διαίρεση έχει τελειώσει.

Συνήθως όμως την συνεχίζουμε.......

Δεν αναλύω τον τρόπο , βρίσκουμε:

1/3 =0,33333333333333333333333333333333333...................................... (άπειρα τριάρια)

Αν μετρούσα στο τριαδικό σύστημα , θα χρησιμοποιούσα τα ψηφία 0,1, και 2 για να περιγράψω όλους τους υπάρχοντες (άπειρους) αριθμούς.

Να μετρήσω:

1 (ένα)

2 (δύο)

10 (τριάδα) τριάδα =3

11 (τριάδα ένα) 3+1=4

12 (τριάδα δύο) 3+2=5

20 (δυοτριάδα) 3+3=6

21 (δυοτριάδα ένα) 3+3+1 =7

22 (δυοτριάδα δύο) 3+3+2=8

100 (τριοτριάδα) 3+3+3=9

101 (τριοτριάδα ένα) 9+1=10



[Πώς γράφεται το ρητός αριθμός 1/3 στο δεκαδικό και πώς στο τριαδικό;]
από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 22 Οκτωβρίου 2011, 05:02 ΜΜ

κτλ κτλ κτλ

κοκ κοκ κοκ

Με τους δεκαδικούς τί κάναμε;

Χωρίζαμε την μονάδα στα 10, 100, 1000. ίσα κομμάτια (10^1, 10^2, 10^3, κτλ)

Εδώ στο «τριαδικό σύστημα αριθμήσεως» θα χωρίζω την μονάδα σε 3, 9, 27, 81, κοκ ίσα κομμάτια (3^1, 3^2 , 3^3, 3^4 , ...κοκ κομμάτια)

Δηλ., αν την μονάδα την χωρίσω σε τρία ίσα κομμάτια, κάθε ένα είναι «εκ κατασκευής» 1/3

Δηλ. το 1/3 όπως το γράφουμε στο δεκαδικό μας σύστημα, στο τριαδικό γράφεται 0,1 (ένα τρίτο)

Ομοίως τα 2/3 του δεκαδικού , θα γράφονται 0,2 (δύο τρίτα της μονάδας)

Συμπέρασμα: Αν ένας ρητός έχει περιοδική αναπαράσταση στο δεκαδικό σύστημα, σε ένα άλλο κατάλληλο σύστημα, μπορεί να έχει τερματιζόμενη, μη περιοδική αναπαράσταση.

Το κριτήριο λόγου μας εξασφαλίζει περιοδικότητα, άρα άπειρη ανθυφαίρεση, άρα αρρητότητα!
από Ιωάννης Πλατάρος - Τετάρτη, 26 Οκτωβρίου 2011, 07:23 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Έστησαν δύο μεγέθη α, β («έστω» δύο μεγέθη α, β ή «έστησαν» δύο μεγέθη α, β είναι το σωστό;)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρώ, ότι β<α

Εκτελώ την ανθυφαίρεση μεταξύ των α και β

$α=π_1β+υ_1$

$β=π_2υ_1+υ_2$

$υ_1=π_3υ_2+υ_3$

$υ_2=π_4υ_3+υ_4$

$υ_3=π_5υ_4+υ_5$

$υ_4=π_6υ_5+υ_6$

$υ_5=π_7υ_6+υ_7$

....

....

$υ_ν=π_{ν+2}υ_{ν+1}+υ_{ν+2}$

Το παραπάνω είναι ένα κλασικό σχήμα περατούμενης ανθυφαίρεσης.

Δεν είναι να το μάθεις απ΄έξω, αλλά να βλέπεις, πώς από το ένα βήμα πάμε στο άλλο .

Να κάνουμε ορισμένες ερωτήσεις εμπέδωσης:

Το ν, υπονοεί έναν φυσικό αριθμό που εννοείται με τον τρόπο που κάνουμε τα βήματα.

Μιλάμε για τον κλασικό αλγόριθμο του Ευκλείδους, εξαγωγής του ΜΚΔ (α,β) (Ακριβώς το ίδιο θα γράφαμε!)

Πόσες σειρές έχω γράψει;

Απάντηση:

Επτά βήματα έχω γράψει, αλλά έχω και δύο σειρές με τελίτσες. Με αυτό τον ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ, εννοώ πόσες σειρές;

(Όχι επτά!)

Κοιτάω την τελευταία σειρά. Βλέπω το πρώτο που λέει $υ_ν$ Άρα έχω ν σειρές; Δεν έχω ν, αλλά ν+2 σειρές! (Για κοίτα από ξεκινάει η αρίθμηση: (α, β, $υ_1$, $υ_2$, $υ_3$, ..., $υ_ν$) Άρα όλα μαζί είναι ν+2

(Όποιος δεν το κατάλαβε, μου στέλνει μήνυμα)

Πριν μιλήσω για το «κριτήριο λόγου», να θυμηθούμε , ότι αν κάνουμε την διαίρεση

κ δια λ (λ<κ) , θα βρούμε κάποιο πηλίκο π και κάποιο υπόλοιπο υ

Αν έχω α έναν αριθμό ας πούμε θετικό, και κάνω την διαίρεση

ακ δια αλ , θα βρω τό ΙΔΙΟ πηλίκο π και το ίδιο υπόλοιπο υ .

Υπάρχει αντίρρηση;

κ/λ = ακ/αλ

Κοιτάμε τώρα το αρχικό σχήμα της ανθυφαίρεσης (Δεν μπορείς να το δεις καλά από την οθόνη, κάνε μια εκτύπωση!)

Είναι ν+2 σειρές (εννοούνται) από διαιρέσεις (ταυτότητες διαίρεσης)

Αν κοιτάξεις καλά τις διαιρέσεις, είναι όλες του τύπου $υ_κ/υ_{κ+1}$

Ας πούμε , αυτή, αντιστοιχεί στην διαίρεση

$υ_κ=π_{κ+2}\ υ_{κ+1}+\ υ_{κ+2}$

Μετά ας πούμε από ρ βήματα πάω στην διαίρεση

$\upsilon_{\kappa+\rho}=\pi_{\kappa+2+\rho}\ \upsilon_{\kappa+1+\rho}+\upsilon_{\kappa+2+\rho}$

(άλλα ρ στο πλήθος βήματα έκανα)

Ας πούμε τώρα, ότι ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΤΥΧΑΙΑ, ΟΤΙ

$\boldsymbol{\upsilon_\kappa/\upsilon_{\kappa+1}=\upsilon_\rho/\upsilon_{\rho+1}}$

Δηλ., μετά από ρ βήματα έχω την ΙΔΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ!

τι σημαίνει αυτό;

όσα πηλίκα έχω βρει από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ, ΤΑ ΙΔΙΑ ΘΑ ΒΡΩ ΑΝ ΣΥΝΕΧΙΣΩ ΤΗΝ ΔΙΑΙΡΕΣΗ! Δηλ. δεν χρειάζεται να την συνεχίσω πάρα κάτω, διότι θα βρίσκω διαρκώς τα ίδια πηλίκα, επαναληπτικά.

το ίδιο ΠΕΡΙΠΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ   γίνεται όταν κάνω την διαίρεση 32 /7

=4,5714285714285714285714285714286.............(περίοδος το 571428)

Κάπου βγαίνει ΙΔΙΟ υπόλοιπο, άρα θα συνεχιστεί το ίδιο έργο.......

(κάντε τη με το χέρι να ΚΑΤΑΛΑΒΕΤΕ ΤΙ ΕΝΝΟΩ)

Στην ανθυφαίρεση βγαίνει Η ΙΔΙΑ (ουσιαστικά) διαίρεση, διότι έχω ΙΔΙΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ

Αν παρατηρήσω μια τέτοια αναλογία, δεν είναι ανάγκη να εκτελέσω διαιρέσεις μέχρι να σταματήσει η ανθυφαίρεση! Αφού βρήκα τον ίδιο λόγο, πάει να πει, ότι από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ θα ξαναπαίζεται το ίδιο έργο μέχρι να ξαναβρώ τον ίδιο λόγο κ.οκ. επ΄άπειρον!

ΔΗΛΑΔΗ, ΚΑΤΑΛΑΒΑΙΝΩ, ότι η ανθυφαίρεση ΔΕΝ σταματάει και συνεχίζεται επ΄άπειρον ΑΡΑ ΕΧΩ ΑΡΡΗΤΗ ΣΧΕΣΗ!

Ευτυχώς που υπάρχει αυτό το κριτήριο, αλλιώς θα συνέχιζα, χωρίς ΠΟΤΕ να γνωρίζω αν σταματάει ή δεν σταματάει!

Πράγματι, αν μετά μυρίων βασάνων έχω φθάσει στο λ.χ. 17ο βήμα μιας ανθυφαίρεσης που θα ξέρω αν σταματάει (έχω ρητή σχέση) ή δεν σταματάει (έχω άρρητη σχέση)

(Συνεχίζεται)



Το κριτήριο λόγου μας εξασφαλίζει περιοδικότητα, άρα άπειρη ανθυφαίρεση, άρα αρρητότητα!
από Ιωάννης Πλατάρος - Τετάρτη, 26 Οκτωβρίου 2011, 07:23 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Έστωσαν δύο μεγέθη α, β   («έστω» δύο μεγέθη α, β ή «έστωσαν» δύο μεγέθη α, β είναι το σωστό;)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρώ, ότι $\beta<\alpha$

Εκτελώ την ανθυφαίρεση μεταξύ των α και β

$\alpha=\pi_1\beta+\upsilon_1$

$\beta=\pi_2\upsilon_1+\upsilon_2$

$\upsilon_1=\pi_3\upsilon_2+\upsilon_3$

$\upsilon_2=\pi_4\upsilon_3+\upsilon_4$

$\upsilon_3=\pi_5\upsilon_4+\upsilon_5$

$\upsilon_4=\pi_6\upsilon_5+\upsilon_6$

$\upsilon_5=\pi_7\upsilon_6+\upsilon_7$

....

....

$\upsilon_\nu=\pi_{\nu+2}\upsilon_{\nu+1}+\upsilon_{\nu+2}$

Το παραπάνω είναι ένα κλασικό σχήμα περατούμενης ανθυφαίρεσης.

Δεν είναι να το μάθεις απ΄έξω, αλλά να βλέπεις, πώς από το ένα βήμα πάμε στο άλλο .

<u>Να κάνουμε ορισμένες ερωτήσεις εμπέδωσης:</u>

Το ν, υπονοεί έναν φυσικό αριθμό που εννοείται με τον τρόπο που κάνουμε τα βήματα.

Μιλάμε για τον κλασικό αλγόριθμο του Ευκλείδους, εξαγωγής του ΜΚΔ (α,β)

<u>**Πόσες σειρές έχω γράψει;**</u>

<u>Απάντηση:</u>

Επτά βήματα έχω γράψει, αλλά έχω και δύο σειρές με τελίτσες. Με αυτό τον ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ, εννοώ πόσες σειρές;

(Όχι πάντως επτά!)

Κοιτάω την τελευταία σειρά.

Βλέπω το πρώτο που λέει υ_ν

Άρα έχω ν σειρές;

Δεν έχω ν, αλλά ν+2 σειρές!

(Για κοίτα από ξεκινάει η αρίθμηση: (α, β, υ_1, υ_2, υ_3, ..., υ_ν) Άρα όλα μαζί είναι ν+2

(Όποιος δεν το κατάλαβε, μου στέλνει μήνυμα)

Πριν μιλήσω για το ***«κριτήριο λόγου»***, να θυμηθούμε , ότι αν κάνουμε την διαίρεση

κ δια λ (λ<κ) , θα βρούμε κάποιο πηλίκο π και κάποιο υπόλοιπο υ

Αν έχω α έναν αριθμό ας πούμε θετικό, και κάνω την διαίρεση

ακ δια αλ , θα βρω τό ΙΔΙΟ πηλίκο π και το ίδιο υπόλοιπο υ .

Υπάρχει αντίρρηση;

$κ/λ = ακ/αλ$

Κοιτάμε τώρα το αρχικό σχήμα της ανθυφαίρεσης (Δεν μπορείς να το δεις καλά από την οθόνη, κάνε μια εκτύπωση!)

Είναι ν+2 σειρές (εννούνται) από διαιρέσεις (ταυτότητες διαίρεσης)

Αν κοιτάξεις καλά τις διαιρέσεις, είναι όλες του τύπου $υ_κ/υ_{κ+1}$

Ας πούμε , αυτή, αντιστοιχεί στην διαίρεση

$υ_κ=π_{κ+2}\, υ_{κ+1}+ υ_{κ+2}$

Μετά ας πούμε από ρ βήματα πάω στην διαίρεση

$υ_{κ+ρ}=π_{κ+2+ρ}\, υ_{κ+1+ρ}+ υ_{κ+2+ρ}$

(άλλα ρ στο πλήθος βήματα έκανα)

Ας πούμε τώρα, ότι ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΤΥΧΑΙΑ, ΟΤΙ

$\mathbf{υ_κ/υ_{κ+1}=υ_ρ/υ_{ρ+1}}$

Δηλ., μετά από ρ βήματα έχω την ΙΔΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ!

τι σημαίνει αυτό;

Όσα πηλίκα έχω βρει από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ, ΤΑ ΙΔΙΑ ΘΑ ΒΡΩ ΑΝ ΣΥΝΕΧΙΣΩ ΤΗΝ ΔΙΑΙΡΕΣΗ! Δηλ. δεν χρειάζεται να την συνεχίσω πάρα κάτω, διότι θα βρίσκω διαρκώς τα ίδια πηλίκα, επαναληπτικά.

Το ίδιο ΠΕΡΙΠΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ γίνεται όταν κάνω την διαίρεση 32 /7

=4,571428571428571428571428571428 6............(περίοδος το 571428)

Κάπου βγαίνει ΙΔΙΟ υπόλοιπο, άρα θα συνεχιστεί το ίδιο έργο.......

(κάντε τη με το χέρι να ΚΑΤΑΛΑΒΕΤΕ ΤΙ ΕΝΝΟΩ)

Στην ανθυφαίρεση βγαίνει Η ΙΔΙΑ (ουσιαστικά) διαίρεση, διότι έχω ΙΔΙΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ

Αν παρατηρήσω μια τέτοια αναλογία, δεν είναι ανάγκη να εκτελέσω διαιρέσεις μέχρι να σταματήσει η ανθυφαίρεση! Αφού βρήκα τον ίδιο λόγο, πάει να πει, ότι από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ θα ξαναπαίζεται το ίδιο έργο μέχρι να ξαναβρώ τον ίδιο λόγο κοκ. επ΄άπειρον!

ΔΗΛΑΔΗ, ΚΑΤΑΛΑΒΑΙΝΩ, ότι η ανθυφαίρεση ΔΕΝ σταματάει και συνεχίζεται επ΄άπειρον ΑΡΑ ΕΧΩ ΑΡΡΗΤΗ ΣΧΕΣΗ!

Ευτυχώς που υπάρχει αυτό το κριτήριο, αλλιώς θα συνέχιζα, χωρίς ΠΟΤΕ να γνωρίζω αν σταματάει ή δεν σταματάει!

Πράγματι, αν μετά μυρίων βασάνων έχω φθάσει στο λ.χ. 17ο βήμα μιας ανθυφαίρεσης που θα ξέρω αν σταματάει (έχω ρητή σχέση) ή δεν σταματάει (έχω άρρητη σχέση)

Το κριτήριο λόγου δεν το εξήγησα αυστηρά Μαθηματικά, αν και δεν είναι δύσκολη η εξήγησή του, δηλαδή, γιατί σε άλλα ρ βήματα θα βρώ ίδιο λόγο και σε άλλα ρ βήματα τον ίδιο λόγο κ.ο.κ.

(Συνεχίζεται)

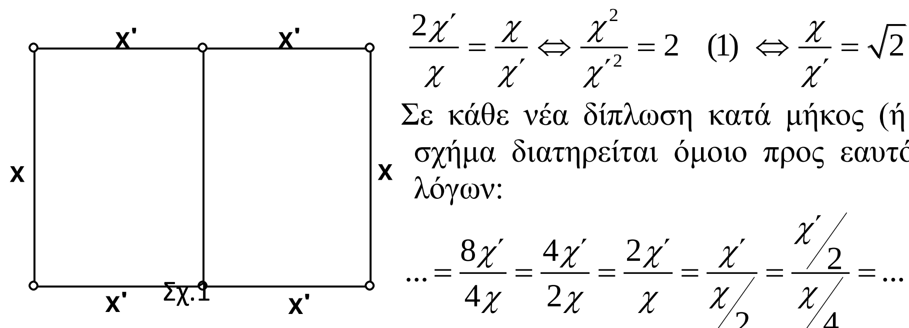
ΕΦΑΡΜΟΖΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΕΝΑ ΦΥΛΛΟ ΧΑΡΤΙ A_4

Γιάννης Π. Πλατάρος *, Καπετάν Κρόμπα 37, Τ.Κ. 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ*

Ηλ. δ/ση: Plataros@sch.gr

Περίληψη: *Στο πιο κοινό μέγεθος χαρτιού στον κόσμο , κρύβονται απροσδόκητα αρχαία μαθηματικά , τα οποία ανακαλύπτονται με «Γεωμετρία δια διπλώσεως» και τα οποία βασίζονται στο ότι το χαρτί A_4 διπλωνόμενο κατά μήκος παραμένει όμοιο προς εαυτόν όπως και στην «ανθυφαίρεση» του* $\sqrt{2}$ *με την μονάδα.*

Εισαγωγή: Η απαίτηση που έχομε από τα διάφορα μεγέθη χαρτιών φωτοτυπίας , είναι να είναι όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα , έτσι ώστε κατά την σμίκρυνση ή μεγέθυνση, να υπάρχει πλήρης χρησιμοποίηση και του μήκους και του πλάτους . Η σμίκρυνση ή η μεγέθυνση είναι ομοιοθεσίες και θα πρέπει το ομοιόθετο ενός σήματος να χωρά ακριβώς στο μεγαλύτερο ή μικρότερο χαρτί. Επιπρόσθετα, για λόγους οικονομίας στην κοπή των χαρτιών, απαιτούμε ένα χαρτί διπλωνόμενο κατά μήκος, να παραμένει όμοιο προς εαυτόν . Αυτή η απαίτηση, μας οδηγεί στο παρακάτω σχήμα και στην αναλογία:



$$\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi}{\chi'} \Leftrightarrow \frac{\chi^2}{\chi'^2}=2 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{\chi}{\chi'}=\sqrt{2}$$

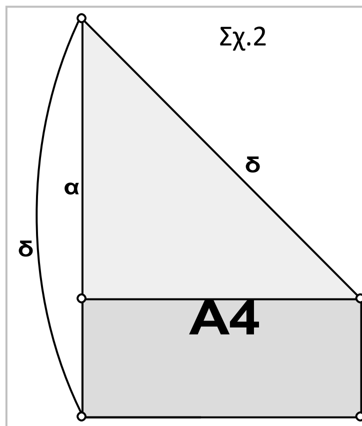
Σε κάθε νέα δίπλωση κατά μήκος (ή αντιστρόφως διπλασιασμό) το νέο σχήμα διατηρείται όμοιο προς εαυτόν όπως φαίνεται στην ισότητα των λόγων:

$$\ldots=\frac{8\chi'}{4\chi}=\frac{4\chi'}{2\chi}=\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi'}{\chi/2}=\frac{\chi'/2}{\chi/4}=\ldots$$

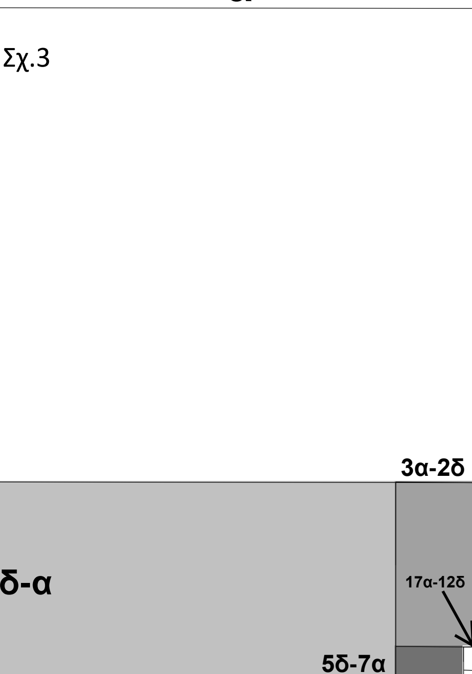
Έτσι, το διπλάσιο του φύλλου A_4 είναι το A_3 , το διπλάσιο του A_2 το μέγεθος A_1 . Αντιστρόφως, το ήμισυ του A_4 είναι το A_5 κ.ο.κ.

Στην μεγέθυνση μιας φωτοτυπίας A_4 σε A_3 εφαρμόζουμε μεγέθυνση $\sqrt{2}\,(\simeq 141\%)$ και αντιστρόφως σε σμίκρυνση A_3 σε A_4 εφαρμόζουμε σμίκρυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=(\simeq 70,7\%)$

Κατασκευή του A4 : Η σχέση (1) δείχνει λόγο πλευρών των οποίων τα τετράγωνα έχουν λόγο 2 . Αυτό παραπέμπει στον λόγο κάθετης και υποτείνουσας πλευράς σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ή ισοδυνάμως στην σχέση διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου. Επομένως , αν κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο και λάβουμε την διαγώνιό του ως την άλλη πλευρά σε παραλληλόγραμμο, έχομε κατασκευάσει ένα όμοιο με το A4 . Αν μάλιστα πάρουμε την μικρή πλευρά 210mm τότε η διαγώνιος θα είναι $\sqrt{2} \bullet 210mm \simeq 297mm$. Ως επαλήθευση μπορεί κανείς να διπλώσει ένα χαρτί A4 κατά την έννοια του διπλανού σχήματος σχηματίζοντας διπλωμένο τετράγωνο και να διαπιστώσει , με νέα δίπλωση, ότι η υποτείνουσα δ συμπίπτει με την μεγαλύτερη πλευρά του A4.



Η Ανθυφαίρεση του A4 : «*Ανθυφαίρεσις*» ή «*Ανταναίρεσις*» ή «*αμοιβαία αφαίρεσις*» , είναι ένας αρχαίος αλγόριθμος εύρεσης κοινού μέτρου (εφ΄ όσον υπάρχει) μεταξύ δύο (ομοειδών) μεγεθών . Στους ακεραίους αριθμούς, ο αλγόριθμος αυτός ταυτίζεται με την γνωστή μέθοδο του Ευκλείδους εξαγωγής Μ.Κ.Δ. , μεταξύ δύο αριθμών. Οι ακέραιοι έχουν πάντα κοινό μέτρο την μονάδα, ο σχετικός αλγόριθμος περατούται πάντα και άρα η σχέση μεταξύ δύο ακεραίων είναι ρητή. Αν όμως τα βήματα του αλγορίθμου συνεχίζονται επ΄ άπειρον, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ των μεγεθών και ότι η σχέση τους είναι άρρητη *(«Στοιχεία» Ευκλείδους, Βιβλίο Χ , πρόταση 2)*



<u>Περιγράφουμε τα βήματα του αλγορίθμου στο διπλανό σχήμα:</u>

(i.) το α , χωρά στο δ , 1 φορά και περισσεύει δ-α <α

(ii.) Το δ-α , χωρά στο α , 2 φορές και περισσεύει 3α-2δ<δ-α.

(iii.)Το 3α-2δ , χωρά στο δ-α , 2 φορές και περισσεύει 5δ-7α<3α-2δ

(iv.)Το 5δ-7α , χωρά στο 3α –2δ , 2 φορές και περισσεύει 17α –12δ<5δ-7α

(v.)Το 17α –12δ , χωρά στο 5δ-7α , 2 φορές και περισσεύει 29δ-41α< 17α –12δ

Η Διαδικασία αυτή εκ πρώτης όψεως δεν ξέρουμε αν περατούται ή συνεχίζεται επ΄ άπειρον. Με διπλώσεις είναι πρακτικώς αδύνατον να ξεπεράσουμε το τέταρτο βήμα του αλγορίθμου , ενώ με αλγεβρικούς υπολογισμούς χρειάζεται να κάνουμε συνεχώς δοκιμές πράγμα που συνεχώς δυσκολεύει. Συνεπώς , για να αποφανθούμε για το άπειρο ή πεπερασμένο του αλγορίθμου, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο , το οποίο υπάρχει και πληρούται για την συγκεκριμένη περίπτωση. Λέγεται **«κριτήριο λόγου»** και θα δούμε πώς εφαρμόζεται. Παρατηρούμε, ότι $\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}(\Leftrightarrow 2\alpha^2=\delta^2 \text{ που ισχύει})$. **Αυτό σημαίνει, ότι η ανθυφαιρετική σχέση από το βήμα (ii) έως το βήμα (iii) θα επαναλαμβάνεται η ίδια ,** δηλ. το τμήμα της με το ψηφίο 2. *(«**κριτήριο λόγου**»)* Με τις ιδιότητες των αναλογιών μπορούμε να το δούμε και ως εξής:

$$\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}=\frac{(\delta-\alpha)-2(3\alpha-2\delta)}{\alpha-2(\delta-\alpha)}=\frac{5\delta-7\alpha}{3\alpha-2\delta}=....=...=...$$

Αυτή η διαδικασία δίνει τα διαδοχικά υπόλοιπα του αλγορίθμου επ΄ άπειρον.

Έτσι, η ανθυφαιρετική σχέση πλευράς προς διαγώνιο δίνεται απ΄την σχέση:

Ανθφ(δ,α) =[1,2,2,2,2,2,2,….] η οποία είναι περιοδική με περίοδο το 2 και ουσιαστικά δίνει μια απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$.

Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα , η αρχαία αλγοριθμική διαδικασία παριστάνεται από το συνεχές κλάσμα:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}}}=\kappa$$

Το κ υπάρχει και είναι το $\sqrt{2}$ (δηλ. ο άρρητος λόγος $\frac{\delta}{\alpha}$) και μπορεί να το διαπιστώσει κάποιος με αλγεβρικό χειρισμό (γνωρίζοντας όμως απαραιτήτως ότι το συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε πραγματικό) ως εξής:

Πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί: Οι Αριθμοί που εμφανίζονται ως συντελεστές στα δ και α λέγονται «πλευρικοί» και «διαμετρικοί» αριθμοί αντιστοίχως , έχουν μελετηθεί από τους Πυθαγορείους και αναφορές σε αυτούς έχομε από τον Θέωνα τον Σμυρνέα (42-45)από τον Ιάμβλιχο στα Σχόλια εις Νικόμαχον τον Γερασινό. (91-93) , από τον Πλάτωνα στην Πολιτεία (546b) και από τον Πρόκλο στα σχόλιά του στην Πολιτεία του Πλάτωνος. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}} = \kappa - 1 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}} = \frac{1}{\kappa - 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}} = \frac{1}{\kappa - 1} - 2 \Leftrightarrow \kappa - 1 = \frac{1}{\kappa - 1} - 2 \Leftrightarrow \kappa = \pm\sqrt{2}\ \mu\varepsilon\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \tau\eta\nu\ \sqrt{2}$$

Α) Είναι μέλη δύο ακολουθιών που ορίζονται με διπλό αναδρομικό τύπο, ως εξής: $\alpha_0 = 1$, $\delta_0 = 1$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \delta_\nu$ (1) κα . Οι πρώτοι 9 όροι των ακολουθιών είναι:

$\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$:	1	2	5	12	29	70	169	408	985	……
$\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$:	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	…….

Β) Οι ακολουθίες συνδέονται με την λίαν ενδιαφέρουσα σχέση $2\alpha_\nu^2 - \delta_\nu^2 = (-1)^\nu\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}$ (3) Πράγματι, αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη των (1) και (2) διπλασιάσουμε την πρώτη σχέση και αφαιρέσουμε κατά μέλη θα καταλήξουμε στην σχέση $2\alpha_{\nu+1}^2 - \delta_{\nu+1}^2 = -(2\alpha_\nu^2 - \delta_\nu^2) = -(-1)^\nu = (-1)^{\nu+1}$. Μάλιστα ο Πρόκλος (2.27.1-2.29.4) , αποδεικνύει την (3) κάνοντας χρήση της προτάσεως ΙΙ.10 των Στοιχείων του Ευκλείδους («***γλαφυρόν θεώρημα***») Το εξαιρετικά ενδιαφέρον είναι, ότι σύμφωνα με τους Van der Waerden Στυλιανό Νεγρεπόντη κ.ά. πρέπει να θεωρηθεί βέβαιον, ότι ο Ευκλείδης εγνώριζε την μέθοδο απόδειξης της τελείας επαγωγής. Ο Van der Waerden μάλιστα ισχυρίζεται, ότι ήταν γνωστή στους Πυθαγορείους καθώς και τον Ζήνωνα τον Ελεάτη (5^{ος} αιώνας π.Χ.) . Τα επιχειρήματα είναι αρκετά και το κύριο των οποίων εστιάζεται στο ότι η πρόταση ΙΙ.10 αφ΄ ενός έχει μια εξαιρετικά εξεζητημένη ειδική διατύπωση και αφ΄ ετέρου δεν εφαρμόζεται πουθενά αλλού στα «Στοιχεία». Όμως, η ΙΙ.10 , συνιστά την απόδειξη της (3) στο βήμα «αποδεικνύω για ν= κ+1» της επαγωγικής μεθόδου.

Επίσης η (3) ισοδυναμεί με την σχέση $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu} = \sqrt{2 - \frac{(-1)^\nu}{\alpha_\nu^2}}$ (4) η οποία ορίζει μια νέα ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στο $\sqrt{2}$. Μάλιστα όπως φαίνεται στο β΄μέλος της (4) , έχομε όρους που είναι διαδοχικές προσεγγίσεις εναλλάξ κατ΄ έλλειψιν και καθ΄ υπεροχήν του $\sqrt{2}$ και μάλιστα με σημαντική ταχύτητα. Παραστατικότερα αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

δ_ν/α_ν	1	1,5	1,4	1,416	1,413	1,4142	1,41420	1,414215	1,4142131
$\sqrt{2}$ =1.4142135623730950488016887242096980785696718753769481…									

Επίσης ισχύει: $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{5}{7}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{12}{17}$ *κ.ο.κ.*

Σήμερα η (3) είναι μια μορφή της «*εξίσωσης του Pell*» που έχει θεμελιακή θέση στην θεωρία αριθμών. Ακόμα η $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγεται «*ακολουθία Pell*» καθώς και η $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ που είναι μια γενικότερη περίπτωσή της. Οι «*αριθμοί Pell*» συνδέονται με τους «*αριθμούς Lucas*» και με τους «*αριθμούς Fibonacci* » για κάθε περίπτωση των οποίων έχομε έναν απίστευτο όγκο παγκόσμιας βιβλιογραφίας . Σήμερα γνωρίζουμε ότι και για τις δύο ακολουθίες $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ισχύει ο ίδιος αναδρομικός τύπος : $\alpha_{\nu+2} = 2\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$, απ΄ όπου με την βοήθεια της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε και τους γενικούς όρους , για την περίπτωσή μας: $\alpha_\nu = \frac{(1+\sqrt{2})^\nu - (1-\sqrt{2})^\nu}{2\sqrt{2}}, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$ και $\delta_\nu = \frac{(1+\sqrt{2})^\nu + (1-\sqrt{2})^\nu}{2}, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$

Δύο σχέσεις που συνδέουν τις ακολουθίες και που συνδέεται και με την ανθυφαίρεση, είναι η $\delta_\nu - \sqrt{2}\alpha_\nu = (-1)^\nu(\sqrt{2}-1)^\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\delta_\nu + \sqrt{2}\alpha_\nu = (\sqrt{2}+1)^\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ οι οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν την θεμελιώδη σχέση (3)

Μια γενική ανθυφαιρετική σχέση που συνδέει πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, είναι η ανθφ($\alpha_\nu - \delta_\nu\sqrt{2}, 1) = [2\delta_\nu, 2\delta_\nu, 2\delta_\nu, 2\delta_\nu, 2\delta_\nu, ...]$

Σειρές: Απ ΄το σχήμα 3 , φαίνεται, ότι αν προσθέσω το εμβαδόν του πρώτου τετραγώνου και τα εμβαδά των απείρων ορθογωνίων που δημιουργούνται με την ανθυφαίρεση, θα πάρω το εμβαδόν του A_4. Δηλ.:

$$\alpha^2 + 2(\delta-\alpha)^2 + 2(3\alpha-2\delta)^2 + 2(5\delta-7\alpha)^2 + 2(17\alpha-12\delta)^2 + 2(29\delta-41\alpha)^2 + ... = \alpha\delta \text{ ή}$$

$$\alpha^2 + 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^\kappa \alpha_\kappa \delta + (-1)^{\kappa+1}\delta_\kappa \alpha]^2 = \alpha\delta . \ (5)$$

Επίσης, αν προσθέσουμε όλα τα μήκη των απείρων ορθογωνίων κατά την οριζόντια διεύθυνση έχομε το άπειρο άθροισμα ίσο με α Δηλ.

$$2(\delta-\alpha) + 2(5\delta-7\alpha) + 2(29\delta-41\alpha) + ... = \alpha \text{ ή } 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta - \delta_{2\kappa}\alpha) = \alpha \ (6)$$

Επίσης το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων κατά την κατακόρυφη έννοια, είναι δ-α , δηλαδή:

$$2(3\alpha-2\delta) + 2(17\alpha-12\delta) + 2(99\alpha-70\delta) + ... = \delta - \alpha \text{ ή } 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha - \alpha_{2\kappa+1}\delta) = \delta - \alpha \ (7)$$

Οι ισότητες (6) και (7) , με πρόσθεση κατά μέλη , δίνουν το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων:

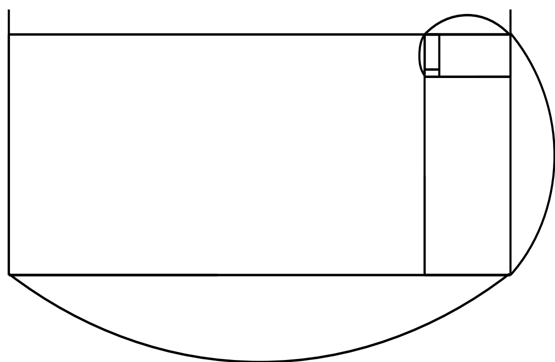
$$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha - \alpha_{2\kappa+1}\delta) + 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta - \delta_{2\kappa}\alpha) = \delta - \alpha + \alpha \Leftrightarrow$$

$$2[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha - \alpha_{2\kappa+1}\delta) + \sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta - \delta_{2\kappa}\alpha)] = \delta \Leftrightarrow 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^\kappa\alpha_\kappa\delta + (-1)^{\kappa+1}\delta_\kappa\alpha] = \delta$$

Σε όλα τα ανωτέρω, μπορεί ο αναγνώστης να θεωρεί α=1 και δ=$\sqrt{2}$.

Επειδή η σύγκλιση των σειρών παρουσιάζεται εποπτικά, μπορεί να δικαιολογηθεί και θεωρητικά με αρχαίο κριτήριο σύγκλισης των «Στοιχείων» του Ευκλείδους την περίφημη «μέθοδο εξαντλήσεως» *(X.1)* σύμφωνα με την οποία, αν από ένα μέγεθος αποκοπεί τμήμα μεγαλύτερο του ημίσεως και από το εναπομένον αποκοπεί τμήμα πάλι μεγαλύτερο του ημίσεως και αυτό γίνεται συνεχώς, τότε μετά από πεπερασμένα βήματα, το εναπομένον, μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό. Το κριτήριο πληρούται τόσο για τα «αποκοπτόμενα ορθογώνια» από το A_4 , όσο και για τα «αποκοπτόμενα μήκη» των ορθογωνίων.

Καμπύλες: Αν τα προκύπτοντα ορθογώνια κατά την ανθυφαίρεση τα διατάξουμε με κυκλική φορά, κάνοντας τις διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω, τότε οι κορυφές των ορθογωνίων ευρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **εσώστρεφος ηλιοτροπική,** επειδή οι σπόροι του ηλιοτροπίου είναι τοποθετημένοι στο άνθος του σύμφωνα με μια τέτοια καμπύλη , η οποία έχει άμεση σχέση και με τους αριθμούς Fibonacci.



Συμπεράσματα: Για άλλη μια φορά φαίνεται, ότι τα μαθηματικά είναι «εφαρμοζόμενα» σε κάθε πτυχή του επιστητού αλλά και της καθημερινότητας , είναι μπροστά στα μάτια μας και μοιάζουν με «λαχείο ξυστό» Το μόνο που χρειάζεται είναι να ξύσουμε για να αποκαλυφθούν. Το αν θα είναι και εφαρμοσμένα εξαρτάται από την «τύχη» μας και βεβαίως από τις ανθρώπινες ανάγκες μας

Βιβλιογραφική αναφορά:

1) Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά» στο Παν. Αθηνών ,χειμερινό εξάμηνο 2001-02 διδάσκων Στυλιανός Νεγρεπόντης .
2) Ευάγγελου Σ. Σταμάτη «Ευκλείδους Στοιχεία» τ. I, II , III. Ο.ΕΔ.Β
3) Ευκλείδη Στοιχεία τ. 2 , έκδοση Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001
4)Εξαρχάκου Θεοδώρου «Η αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης» Πρακτικά 17ου Συνεδρίου ΕΜΕ Αθήνα 2000.
5) http://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html

6) http://users.tellurian.net/hsejar/maths/pell/
7) http://numbers.computation.free.fr/Constants/Sqrt2/sqrt2.html

Abstract: In the most common size of paper in the world, there are included hidden ancient mathematics, which can be discovered with the «Geometry though folding». These are based in the fact that the paper folded in length remains similar to itself, as well as in the «anthyphaeresis» of $\sqrt{2}$ with the unit

1ο ΓΕΛ Μεσσήνης *Τετάρτη 05 Οκτωβρίου 2011*

Α΄Λυκείου. *Ομάδα 1*

Μάθημα: Ερευνητική Εργασία στα Μαθηματικά, για στην ανακάλυψη της αρρητότητας

Δραστηριότητες Εβδομάδας:

1. Να αναζητηθεί η πολυσημία του όρου **«λόγος»** Τι σημαίνει στα νέα Ελληνικά, τι σημαίνει στα Αρχαία Ελληνικά. Να αναζητηθούν τα αντίθετα , τα παράγωγα και να οριοθετηθεί τα νόημα τη λέξης το μαθηματικό από τις άλλες σημασίες όπως του «ορθού λόγου» της «ομιλίας» σε σχέση με την έννοια «σχέση» Διαβάστε το προοίμιο (τι είναι το «προοίμιο;») του *κατά Ιωάννην Ευαγγελίου (Κεφ.1, 1-4)* και αντικαταστήστε την λέξη **«λόγος»** με την λέξη **«σχέση»**

2. Να εκτελέσετε τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και 1 ως προς τα 5 πρώτα βήματα.
Υπόμνηση: Όταν ο Ευκλείδειος αλγόριθμος μεταξύ δύο μεγεθών περατώνεται, τα δύο μεγέθη έχουν κοινό μέτρο. Όταν δεν περατώνεται, τα δύο ομοειδή μεγέθη (αριθμοί, ευθύγραμμα τμήματα κτλ) δεν έχουν κοινό μέτρο. Γεννάται όμως η απορία: Πώς θα ξέρουμε αν τελειώνει ή δεν τελειώνει ο αλγόριθμος; Κι αν τελειώνει σε 100.000 βήματα, φθάνει η ζωή ενός ανθρώπου να τα εκτελέσει; Μήπως υπάρχει κάτι τι που να μας επιτρέπει να αποφανθούμε αν τελειώνει ή όχι; Το ερώτημα το κρατάμε ανοικτό μέχρι στιγμής....

3. Είναι γνωστό, ότι ο ευκλείδειος αλγόριθμος εύρεσης ΜΚΔ δύο φυσικών, **είναι ταυτόσημος** με την διαδικασία της ανθυφαίρεσης. Να βρείτε ποια σχέση έχει αυτός ο αλγόριθμος με τα **«συνεχή κλάσματα»** Αφού βρείτε την σχέση, να γράψετε τα κλάσματα $\frac{120}{15}$ και $\frac{1000}{480}$ ως συνεχή κλάσματα.